上越数学教育研究, 第 23 号, 上越教育大学数学教室, 2008 年, pp.31-42.

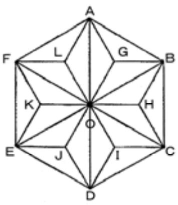
移動と作図から論証への移行に関する研究

髙本　誠二郎
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

中学校での論証指導が伝統的に十分に実現されないことの大きな原因として，算数と数学の間の乖離の問題が指摘されてきているが（平林，1986），その具体的な方策は数学教育における大きな研究課題となっている。

本研究は，算数から数学への移行の様相についての枠組みを，認知，表現・コミュニケーションの面から構成するとともに，中学１年『平面図形』を算数と論証をつなぐ移行教材として着目し，麻の葉模様（図１）を基本的状況（Brousseau，1997）に据えて，単元を，『図形の発見ゲーム』，『陣取りゲーム』，『作図の発見ゲーム』の３つの場で設計し（髙本，2007a），移行の実際を，授業を通して実証的に考察することを目的とした。



【図１】

これまで，第１の場『図形の発見ゲーム』，および第２の場『陣取りゲーム』に関する教授実験の分析を報告してきた（髙本，2007b；髙本・岡崎，2007）。各場で得られた知見については第３節で述べる。

本稿では，第３の場『作図の発見ゲーム』に関する教授実験を分析し，移動による図形認識と作図を相互に関連づけた学習展開が，移行期の学習にどう影響するかを明らかにするとともに，３つの場における特徴的な活動から，移行の様相をさらに具体化していきたい。

２．設計と分析のための視点

本研究では，算数から数学への移行を，岡崎・岩崎（2003）の枠組みをベースにしつつ，図２のように暫定的にとらえることとした（髙本，2007a）。

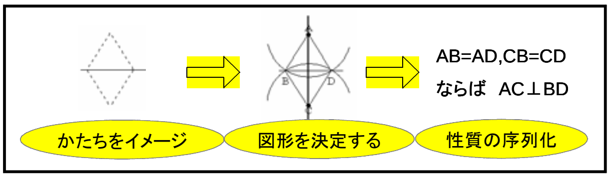
段階	認知	表現・コミュニケーション
算数的	図形の特徴の認識 ・経験的・帰納的	
移行的	図形の関係性の認識 ・図形の道具的使用 ・活動を通した図形の決定性 ・論理的順序性の認識	・操作の言語・記号化 ・図の発展的認識 ・合意形成とそれに基づく説明
数学的	図形の演繹性の認識 ・論理を言語・記号的に展開する	

【図２】移行的段階の暫定的枠組み.

算数的段階は，かたちや図に対する経験的・帰納的活動により図形の性質を認識していく学習段階である。これに対し，数学的段階は，論理を言語や記号で展開しながら図形の命題を証明する学習段階を指し，ここでは，ある図形の性質は，命題として論理の前提の役割を果たす。この性質の機能の相違が，図形における算数と数学の違いを象徴していよう。そこで，この移行期に，図形の関係をとらえる段階を設定する必要があると考える。

岡崎・岩崎（2003）では，作図の学習過程に，図形の道具的使用，図形の決定性，論理性の活動による把握の相が見られることが指摘されている。とりわけ，たこ形やひし形をイメージし，垂線，垂直二等分線，角の二等分線の作図を決定し，作図プロセスを言語的

に顕在化することによって，性質の序列的関係が理解される（図３）。



【図３】垂線の作図で期待される学習過程.

本研究では，岡崎・岩崎（2003）の移行の枠組みに，図の役割の変容（橋本，2006），および合意形成により説明をつくる活動（例えば，榎戸，1988；江森，1994）という視点をとり入れて，これを単元の設計および分析の視点とする。そして，教授実験を通して，その実際の様相を明らかにしようとするものである。

３．教授実験について

3.1．第１，第２の場から得られた知見

本節では，第１，第２の場の学習から得られた知見を述べ，第３の場の学習に入る時点での生徒の状態を示す。

第１の場『図形の発見ゲーム』は，麻の葉模様からの発見内容を，ゲーム形式で正当化し合う活動を中心に展開された。そこでは，以下のような知見が得られた（髙本，2007b）。

◇図形を発見し，正当化または反証し合う場の設定により，他者を想定した思考や反例の意識が生まれ，経験的な説明の不十分性が意識された。

◇行為を振り返り，それを正当化の手段として利用し関係づけたときに，図形の決定性が認識された。また，１つの図形で他の図形をとらえようとする思考が生じ，このとき，前提の意識が芽生えた。

◇麻の葉からの図形の発見活動を通して，辺のない所で形を見たり，いろいろな向きの図形をとり出したりすることが可能となった。また，１つの図形について，見えない所に対称軸や対称の中心を見出す追究が見られた。

第２の場『陣取りゲーム』では，「平行」・「対称」・「回転」の移動を用いて麻の葉の中の陣を取り合うゲームを楽しむ中で，次のような知見を得た（髙本・岡崎，2007）。

◇移動によるゲームを通した学習過程において，移動が念頭化され，移動を２つの位置の対応としてとらえることができた。特に，対象図形間と対象となる図形を含んだ包摂図形間との二重対応で移動をとらえ，麻の葉の構造を探究する状態への変容が認められた。

◇麻の葉の構造を探究する状況では，見えない点や包摂図形の頂点が回転の中心として顕在化され，回転移動は，“多くの場所へ移動できる移動”として認知されるようになった。そして，“麻の葉の全ての場所に，回転移動によって移動可能か？”という問題意識が生まれつつある。

移行的段階の枠組み（図２）の視点から考察すると，いずれの場も，活動の初期段階は，操作や経験，素朴なアイデアに支えられた算数的な状況であるが，次第に，図形の関係性，特に，他の図形の性質を用いて図形を決定づける思考が生まれた。このとき，「麻の葉模様」は，単なる図（模様）ではなく，様々な図形および移動の構造を内包した図へと変容している。また，合意を基調とするコミュニケーションに慣れてきている。

3.2．第３の場の構想および基本的仮説

第３の場は，第１の場で発見した全ての図形の作図を試みる場と，第２の場で培った移動の考えも利用しながら，その手続きの正当化によって論証への足がかりをつくる場の２つからなる。

前者の場では，岡崎・岩崎（2003）の流れを基本に構想した。そこに見られる生徒の図形認識の発展過程は，次のようになる。

段階Ⅰ．図からかたちや性質を抽象する。

段階Ⅱ．かたちとその性質を認知的道具と

して，作図の手続きを構成する。

段階Ⅲ．作図の手続きを，図形の性質として顕在化する。さらに，手続きを，正当化の条件として再構成する。

段階Ⅳ．図形の性質の序列的関係，定義の役割を素朴に理解する。

段階Ⅴ． 経験的認識の限界を把握する。

（岡崎・岩崎，2003，p.19）

図３に示した学習過程は，概ね段階Ⅰから Ⅳの流れを表しているととらえることができる。これらの段階を進める上での要因として，生徒が作図をつくり出す過程を生かしながら，数学的に重要な切れ目や結果を記号的に記述して反省していくこと（活動のプロトコル化）が極めて重要であると指摘されており，本実験でもこれをとり入れることとする。

本教授実験では，上記の流れの中に，「作図の発見ゲーム」(注) をとり入れる。つまり，第１の場同様，学級を２チームに分け，提案や反論にポイントを与え，学級の合意により正当化を図る形式で進めるものとする。

この作図の後に，図形の移動と作図が総合され，その正当化が行われる場を設ける。この後者の場では，任意の位置に置かれた２つの三角形が，回転移動によって重なるか，重なるとすればその回転の中心はどこで，それはどのように論証されるかを探究する。第２の場で，生徒たちは，回転移動が，麻の葉の中の陣を取る上で大きな役割を果たすことに意識が向いており，この場の設定は，思考の自然なつながりのもとに設定できるものと想定される。また，第１，第２の場での，図から様々な図形を見出し, 性質を関係づけたり，動的に対応づけて図形を決定づけたりした経験が，この場において，どのように作用を及ぼすかは大きな関心事である。ここでは，直観的・操作的な説明が入り込むことを許しながら, 証明のすじ道をたどることができれば，論証の水準に入り込んだと考える。

まとめれば，本研究の基本的仮説は，第１の場の『図形の発見ゲーム』，第２の場の『陣取りゲーム』，第３の場の『作図の発見ゲーム』を経験した生徒は，上記の論証の道筋を理解できるということである。

3.2. 教授実験の方法

実験授業は，新潟県公立中学校１年生２学級を対象に，平成 18 年 12 月から平成 19 年２月にかけて，筆者が授業者となり，各学級計 21 時間実施した（１時間の授業は 40 分)。検討する授業は，１つの学級の第 14 時から第 21 時にかけての８時間分の授業である。毎時間の授業は，ビデオカメラ３台によって授業全体および個々の生徒の活動を記録し，毎授業後，授業者と授業観察者の間で授業検討会が開かれた。データの分析には，グラウンデッド・セオリー・アプローチ（木下，2003）をとり入れ，プロトコルをラベル化し，概念を抽出して，どのような理論体系が認められるかを探った。

４．生徒の学習過程

一連の授業は図４（次頁）の内容で進められ，前半４時間は「作図の発見ゲーム」，後半４時間は，回転の中心の作図を正当化する活動となる。

本節では，それぞれの場面の概要を示し，どのような学習が生じたかを分析していく。

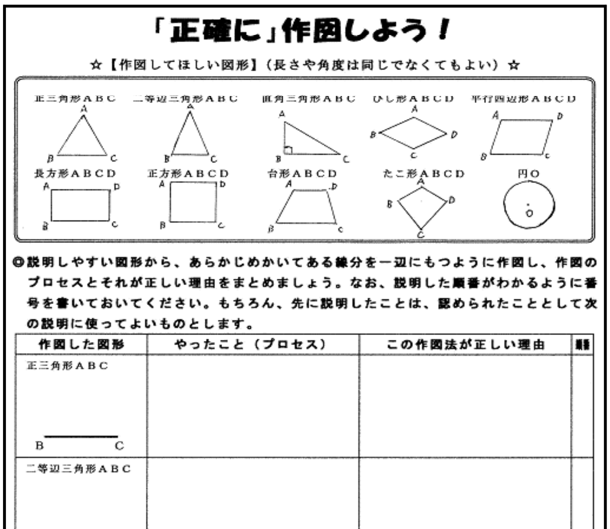
4.1. 「作図の発見ゲーム」の概要

4.1.1. 直角の作図に対する問題意識

作図に用いる道具を定規とコンパスに限定した後，教師は，第１の場で発見した 10 種類の図形全ての作図を，説明しやすい図形から考えるよう促した。なお，完成した形のイメージが共有しやすいよう，それぞれの図形には，構成要素の一部が予め与えられ，生徒は条件に合った作図を行うこととなった（図５）。「作図の発見ゲーム」に向けたグループの話し合いでは，Seki と Hato の間で正三

時	内　容　の　概　要	活動の特徴
1	・作図の導入 ・「作図の発見ゲーム」に向けての話し合い ・作図の発見ゲーム①	直接的に図形を作図しようとする状態
2	・作図の発見ゲーム②	
3	・作図の発見ゲーム③	
4	・一定条件を満たすひし形とたこ形の作図 ・垂直二等分線，垂線，角の二等分線の作図との整合	他の図形の性質を利用して作図する状態
5	・麻の葉の中での移動（第２の場）の振り返り ・新たな場面提示による回転の中心の探究	試行錯誤により回転の中心を見つける状態
6	・回転の中心の求め方の追究 ・垂直二等分線への着目	
7	・作図跡から作図意図の推測 ・垂直二等分線の交点の妥当性の検証	垂直二等分線による作図法を正当化する状態
8	・命題化による回転の中心の作図法の証明 ・単元のまとめ（麻の葉模様の振り返り）	

【図４】第３の場の一連の授業の流れ.


「正確に」作図しよう！

☆【作図してほしい図形】（長さや角度は同じでなくてもよい）☆

◎説明しやすい図形から、あらかじめかいてある線分を一辺にもつように作図し、作図のプロセスとそれが正しい理由をまとめましょう。なお、説明した順番がわかるように番号を書いておいてください。もちろん、先に説明したことは、認められたこととして次の説明に使ってよいものとします。

作図した図形	やったこと（プロセス）	この作図法が正しい理由	
正三角形ＡＢＣ B　C			
二等辺三角形ＡＢＣ B　C			
直角三角形ＡＢＣ			

【図５】作図に用いた学習カード.

角形と二等辺三角形の作図を確認した後，直角三角形の作図に関して，以下のやりとりが見られた。

Hato：（Seki の作図を見て）（三角定規の）直角使っちゃダメだよ。

Seki：使ってないよ。円の４分の１が 90 度だから

Hato：何で円の４分の１が／／

Seki：何となく…

Hato：ほら，って言われたらアウトだよ。

Seki：え，４分の１ってこれ位じゃない？

Hato：“位”じゃ／／

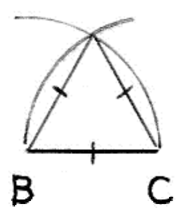
Seki：どうしよう…

ここからも，直角の作図が，生徒たちにとって一つの壁になることが想定される。

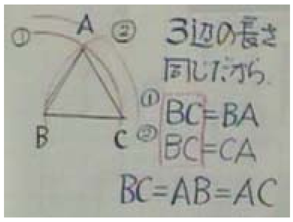
4.1.2. 形が生成可能な図形の作図

「作図の発見ゲーム」で，最初に正当化された作図は正三角形であった。Ima は，図６に示す作図を行い，コンパスを当てながら３辺の相等性を述べた。

ゲーム全体を通じ，教師は関係の記号化に努めた。例えば，ここでの Ima の説明は描き方に言及したものであったが，それを「ＢＣ＝ＢＡ，ＢＣ＝ＣＡ」のように関係として顕在化した。また，等式の推移律との関連づけも示唆した（図７）。



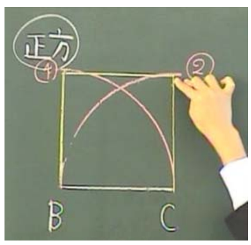
【図６】



【図７】

２ラウンド目，Oda が正方形の作図を提案した。Oda はＢＣを半径に“４分の１”の円Ｂ，Ｃをかいて作図を完成させた（図８，９）。

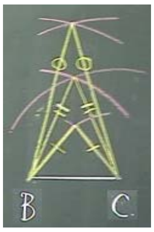
【図８】“４分の１”の円.



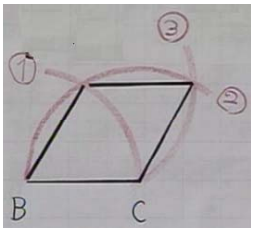
【図９】Odaの作図した正方形.

しかし，周囲からは，“４分の１”の決め方に納得のいかない表情が見られ，正方形の作図は検討課題となる。

これ以降，二等辺三角形，平行四辺形が提案された。二等辺三角形の作図では，半径の任意性が話題となり，教師は，連続変形のイメージとして結びつけた（図 10)。一方で，図 11 のひし形を平行四辺形と提案するなど，図形の認識の不十分さも見られた。



【図10】

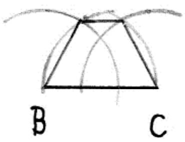


【図11】

4.1.3. 他の図形の性質を利用した作図

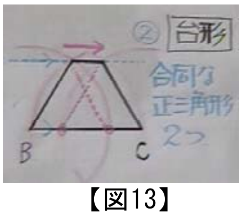
直接的な図形の完成が困難な状況で，先に認められた他の図形の性質を利用する作図が見られ始めた。

教師の指名により，Nisi が不安気に提案したのは，台形の作図であった。まず台形が，正三角形を２つ横に並べてかくように描かれた（図 12)。



【図12】

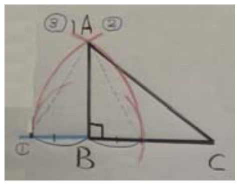
しかし, 形は意識にのぼっておらず, 教師が, 正三角形の作図との類似点を示唆すると，Nisi は「正三角形の頂点が同じ高さで，上底と下底が平行であるから」と作図の正当性を説明した。合同な図形の性質に基づく平行性の説明は, 周囲の納得を得た。さらに教師が，２つの正三角形の頂点を矢印でつなぎ平行移動を示唆すると（図 13)，生徒たちは，仕組みを意識することができた。



【図13】

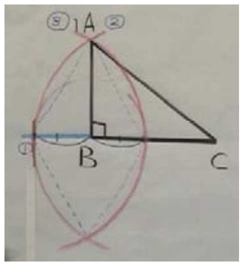
ゲームの最終ラウンド，Oda が直角三角形の作図を提案した。Oda は，与えられた線分ＢＣの左側を延長し，適当な半径で半円Ｂをかき，半径を少し長くして，直線ＢＣとの交点を中心に２つの円をかき，２円の交点ＡとＢを結んで作図した（図 14)。

この時点に至るまでも，教師はひし形の対角線が直角となっていることを意識づけていたが，生徒にとってそれを利用することは難しかった。



【図14】

ここでは，Oda の「半円をかいて線と交わった所は，どっちもＢからの距離が同じだから，その点と点の間で上に三角形をつくればいい」の発言を受けて，教師は，再び二等辺三角形を顕在化し，さらには，下側にひし形をかいて，その対角線になっていると意味づけた（図 15)。



【図15】

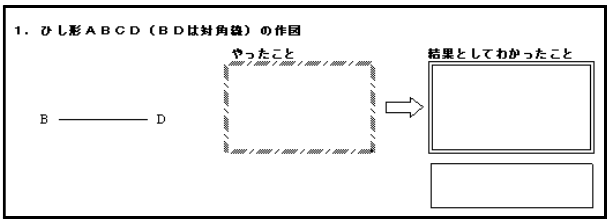
そして，作図が正当化された図形を，性質の組み合わせとしての視点から体系的に整理し（図 16)，図形間のつながりを意識づけ，３時間にわたるゲームをまとめた。

【図16】

4.1.4. 関係の記号化

第４時は，これまで行ってきた図形の作図過程から, 教科書にある作図（垂直二等分線, 垂線, 角の二等分線）を導くことを意図した。

例えば，垂直二等分線の作図では，学習カード（図 17）に示す通り，ＢＤが対角線となるひし形ＡＢＣＤの作図を促し，作図で行ったことと結果としての垂直二等分線の性質を明確にすることにより, 意識づけを図った。


１．ひし形ＡＢＣＤ（ＢＤは対角線）の作図

B ―――― D

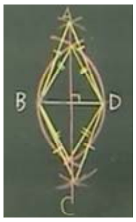
やったこと

結果としてわかったこと

【図17】学習カードの一部.

授業では，様々な半径の長さによるひし形が紹介されたが，どれも目的に合った作図と

なっていることが確認された。そこで，教師は，半径の任意性を視覚的に特徴づけた（図 18）。そして，作図の行為を，記号を用いて「ＡＢ＝ＣＢ＝ＡＤ＝ＣＤ」と表すことを確認し，教科書の表現を引用しながら，結果として「ＡＣ⊥ＢＤ，ＢＭ＝ＤＭ（MはＢＤとＡＣの交点)」が言えることと「ＡＣはＢＤの垂直二等分線」の用語を教師側から与えた。



【図18】

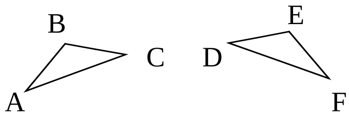
作図の中でかたちを顕在化することや，かたちとその性質を利用して作図すること，作図の命題としてのまとめは，やや教師主導で行われたが，一つの学習の流れとして，生徒たちはそれらを経験した。

4.2. 「回転の中心の作図の正当化」の概要

4.2.1. 試行錯誤しながら中心を求める状態

第５時からは，回転移動の中心を求める活動となる。

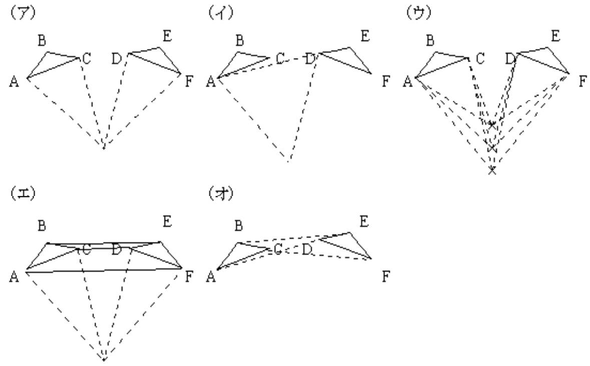
教師は，麻の葉を掲示し，第２の場で，回転移動で多くの場所へ移動可能だということを振り返った後，麻の葉の中の二等辺三角形を２つとり出し，適当な位置に１枚ずつ黒板にはり，「これ（△ＡＢＣ）をある所を中心に回転させると，ここ（△ＤＥＦ）に重なる。回転の中心はどこか？」と発問した（図 19）。



【図19】２つの合同な三角形（問題場面）.

２つの三角形の対応について，すぐに「ＡはD，ＢはＥ，ＣはＦ」と返答されたことからも，中心の場所を想定し，対応づけの中で場面を把握している様子が伺える。この後，課題についてグループ追究に入った。

第５時終了の時点で，次のようなイメージ（図 20）に基づく追究過程が紹介された。



【図20】各グループから紹介されたイメージ.

（ア）は，直観的に想定した中心と三角形の頂点を結び，そこにできたかたちを基に考えようとしたと思われるが，線分の長さに関する表現は，説明の中には出てこなかった。（イ）は，ＡＤの長さを一辺にもつ正三角形を作図したものであり，Oda は，「だから交わった所からＡの長さで円をかくとＤに重なる」と補足した。作図に基づき，中心から対応する点までの距離の相等性を意識した発言ととらえる。（ウ）は，いろいろな半径でＢとＥを中心に円をかき，その交点と三角形の頂点と結んだものである。これも，対応する頂点までの距離の相等性を意識して中心を模索している思考と考える。（エ）は，「垂直二等分線」というつぶやきとともに紹介された。具体的な説明はなされなかったが，図から中心と垂直二等分線との関係を見出そうとしたものと思われる。（オ）は，対応する点同士を結んで場面をとらえようとしている。

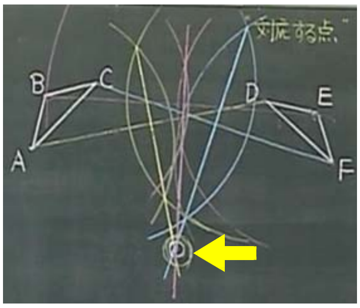
ここではまだ中心の場所は確定されていないが，２つの三角形を対応づけて考える場面で，自らかたちを見出したり対応する頂点を結んだりして追究する思考の背景には，それまでの麻の葉からの図形の発見や移動による学習経験が大きく影響していたと考える。

第６時，図 20 を振り返った後，教師が，「回転の中心の求め方があると思う人？」と問うと，全員が挙手をした。生徒の意識は，“不確定な”中心を決定づける方法への関心に移

っているものととらえる。

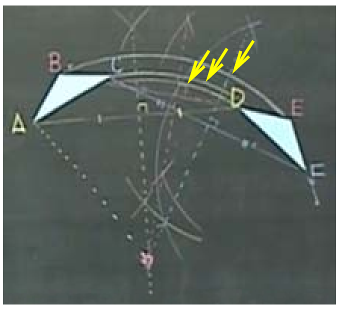
4.2.2. 垂直二等分線を利用した作図法を正当化する段階

中心の求め方を問題にしてグループ追究を行い，その後，全体追究へと移った時，Simi が「自信度 120 %」と挙手をし，黒板に提示された△ＡＢＣと△ＤＥＦのＡとＤ, ＢとＥ, ＣとＦの対応する２点を定規で結び，ＢＥ，ＣＦ，ＡＤの順でそれぞれの線分の垂直二等分線を作図した。教師は，生徒たちに，２つの三角形をとり出した状況を示した学習カードを配布し，Simi の行った作図を一緒にやるよう促した。３つ目のＡＤの垂直二等分線を作図し終えた時，Simi は「この交わった所が中心。…ずれちゃった」とつぶやき，ずれを補うように大きく点を塗りつぶした（図 21. 矢印部）。Simi には，それが一点で交わるという意識が存在したと考えられる。



【図21】Simiの作図.

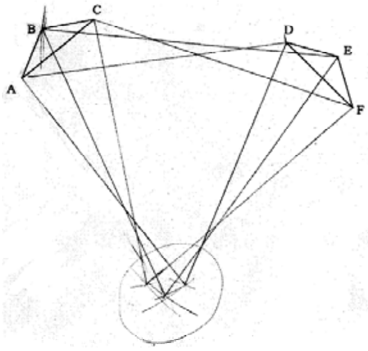
続いて Miya は，その点を中心として，Ａ，Ｂ，Ｃそれぞれまでの長さを半径に持つ円をかき，それぞれの円周上に点Ｄ，Ｅ，Ｆがあることを根拠に正当化した（図 22.矢印部）。



【図22】Miyaの説明.

これは，具体例を例示した経験的な説明であるが，Miya の説明にほぼ全員が納得し，第６時終了時には，Simi の求め方が回転の中心を求める方法として受け入れられた。

第７時において，教師は，垂直二等分線の「交点」を価値づけることを意図し，第６時におけるあるグループの作図（図 23）を提示し，その背景にある考え方を想像させた。



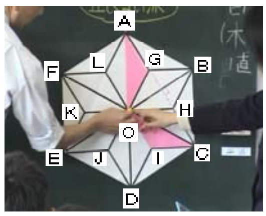
【図23】あるグループの追究の様子.

Hagi は「ＡとＤを，直線の長さをコンパスであわせて，ＡとＤを中心に円をかいて，その交わった交点に線を引いた」と，図から予想したことを発言し，教師が「ここにできてる形って何？」と問うと，「正三角形」と答えた。そこで教師は，バラバラの中心が，垂直二等分線によって調整されたものとして，前時の Simi の求め方を特徴づけた。

ここから教師は，「このことは 100 %正しいことと言っていいですか？」と作図の正当化を求めたが，“正しい”と答えた生徒も，“正しくない”と答えた生徒も少人数であり，皆自信がなさそうであった。

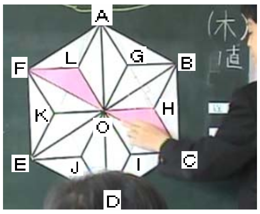
各自による追究の後，“正しい”派から Seki が，「麻の葉模様で考えた」と言い，次のような説明をした。

△ＡＧＯから△ＣＩＯへはＯを中心に回転移動できる。そして，△ＡＧＯと△ＣＩＯの対応する２点を結んだ線分ＡＣ，ＧＩの垂直二等分線の交点はＯである。だから，正しい。（△ＫＥＦと△ＪＯＤの移動も同様）



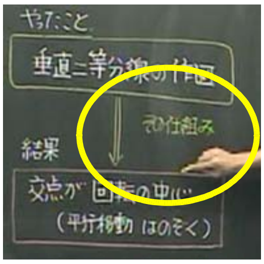
Seki の説明は，麻の葉という特殊な場面で説明したものであった。ここでは，麻の葉模様が追究の基盤となっていたことが示唆される。これに対して，Oda は，“正しくない”として次のように説明した。

△ＦＬＯと△ＯＨＣで平行に並んだ時には，対応する２点を結んだ線分の垂直二等分線は交わらない。だから，平行に並べた時には，説明が成り立たない。だから正しくない。



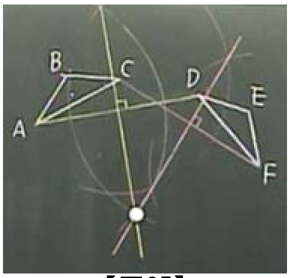
Oda は，反例を一つ示し，正しくないことを説明した。授業後の感想では，反例を示した Oda の説明に納得する声が多かった。しかし，反例を示した Oda 自身が，「平行に並べた時以外は成り立つと思う」と述べていたことは，場合分けの見方の萌芽ととらえる。

第８時，平行になっていない場合は成り立つかを問題にしたところ，Oda 自身が「言える」と述べ，命題が確定する。教師は，「垂直二等分線の作図⇒交点が回転の中心」と板書し，矢印（⇒）の部分を強調しながら，矢印の「仕組み」を考えることを促した（図 24）。

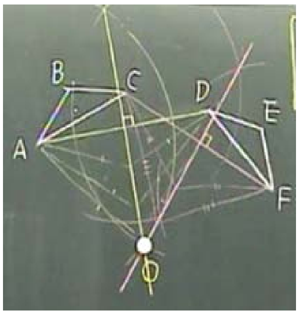


【図24】矢印部分を強調.

グループ追究後の全体追究では，指名された班を代表して Matu が，黒板の図（図 25）を指さしながら，「ＡとＤの中心がその直線で，ＣとＦの線の中心がその直線で，ＢとＥの円の中心も，今ないけど垂直二等分線になって，それが交わる点Ｏは，全ての円の中心ってことになる」と説明した。垂直二等分線を，２点を通る円の中心の集まりとしてとらえたものと考える。教師は，Matu の説明をうなずきながら聞いていた Iori に「どういう所が納得？」と尋ねると，Iori は，「全てそろった点がＯだから」と答えた。交点が，単なる点でなく，“お互いの条件を同時に満たす点”として意識化され始めている。次に，別の班から Noza が，「ＣＦの垂直二等分線上では，どこでもＣとＦがつながる」と切り出した。ここで「つながる」の表現を確認すると，“垂直二等分線上からＣとＦまでの距離はどこでも等しい”という意味で，教師は，図のＣＦの垂直二等分線上の等辺関係を視覚化した（図 26）。



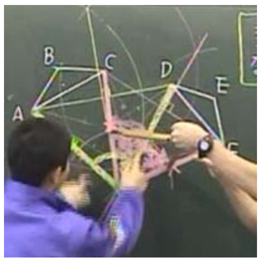
【図25】



【図26】関係がかき込まれた図.

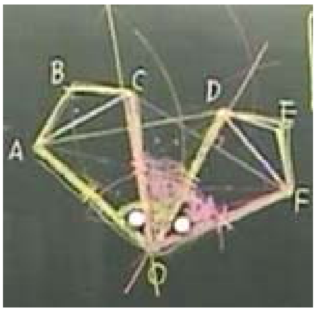
Noza は続けて，「ＡＤの垂直二等分線上では，どこでもＡとＤはつながる。それで，そこで重なった点Ｏは，ＡからＤも，ＣからＦもいけるので中心になる」と説明し，これに多くの生徒が共感を示した。ここで，中心から対応する頂点までの距離が等しいことと垂直二等分線の関係が明確化される。ここでは，垂直二等分線に基づき二等辺三角形がつくられている。つまり，“図から作図”でなく，“作図から図”の構成がなされている。

あとは△ＡＯＣと△ＤＯＦの合同を示せばよいのだが，教師は回転角（∠ＡＯＤと∠ＣＯＦ）を問題にした。授業では，Noza が適当な半径で円Ｏをかき，ＯＣとＯＦの交点同士，ＯＡとＯＤの交点同士にコンパスを当て，間隔が同じことから回転角の相等性を説明した（図 27）。操作結果を根拠にした説


【図27】

明であったが，教師は，「同じ円で弦の長さが同じだから回転角も同じ」とまとめ，「２年生でやる内容」として価値づけた。Nozaの追究を反省したとき，図の中に２つの二等辺三角形（あるいは，おうぎ形）をイメージしていたと考えることもできる。

さらに教師は，∠ＡＯＣと∠ＤＯＦの相等性を証明するために，第２の場の包摂図形の移動を話題にしながら，四角形ＡＢＣＯと四角形ＤＥＦＯをなぞり，２つの四角形の合同性を問題にした。辺の相等性だけでは四角形の合同は示せないが，関係がかき込まれた黒板の図（図 26 参照）を使って，対応する線分の長さが全て等しいことをもとに合同であることを確認し，回転角の相等性をおさえ授業を終えた（図 28)。



【図28】授業終了時の図.

５．考察

5.1. 「作図の発見ゲーム」における生徒の図形認識の特徴

前半の場「作図の発見ゲーム」での生徒の図形認識の特徴として,次の点が上げられる。

・直角を，“円の４分の１”を根拠に正当化する思考が見られた。そして，その経験的な認識による“４分の１”のとり方が吟味の対象となったのは，他者からの問いによるものであった。合意を図る状況設定は，経験的認識の再吟味を促す要素と考える。

・台形や直角三角形の作図を正当化する場面で，正三角形や二等辺三角形，ひし形等の作図との類似性が見えたときに，その形の性質を利用した思考が生まれた。作図過程に形が顕在化されてくることは，論理的な思考を進める上で重要となる。

・与えられた辺ＢＣの長さだけで平行四辺形を作図したように，一つの線分の長さに立脚した作図（岡崎・岩崎，2003）が認められた。一方で，教師のはたらきかけが大きかったが，二等辺三角形や垂直二等分線の作図を連続変形のイメージとして視覚的にとらえるなど，半径の任意性に関する認識は芽生えているものと推測される。

・活動のプロトコル化により，作図のステップの記号化，特に，コンパスによる操作を辺の相等関係として記述することが共有化された。

5.2. 回転の中心が決まるまでの思考過程

第５時からの回転移動の中心を求める学習では,生徒の追究に４つの状態が認められた。

Ⅰ．中心と対応する一組の点との対応で追究する状態

Ⅱ．垂直二等分線との関連性が見えてくる状態

Ⅲ．操作結果により帰納的に正当化を試みる状態

Ⅳ．垂直二等分線の性質と辺の対応が結びつき合同による捉えが可能となる状態

Ⅰは，図 20 に示すように，見えない所にかたちや対応する点を結んだ線をイメージしながら中心の位置を模索しているものの，そのとらえは，中心と対応する一組の点（例えば，ＡとＤ）との関係だけで見る局所的な見方に留まっている状態として特徴づけられる。しかし，場面の中に見えないかたちや線をイメージすることは，本場に至るまでの補助線を利用した図形の発見や移動による図形のとらえが基盤となっているものと考える。

Ⅱは，Ⅰにおける定まらない中心を調整する道具として，垂直二等分線がクローズアップされる状態である。第６時，Simi が黒板の前で，対応する点同士を結んだ３つの線分

の垂直二等分線を作図した際に，「ずれちゃった…」とつぶやいた背景には，中心が一点に決定することを意図して追究する姿勢が伺える。ここでは，三組の対応する点（ＡとＤ，ＢとＥ，ＣとＦ）との関係で中心をとらえようとする追究がなされている。

Ⅲは，Ⅱで発見した作図法の妥当性を検証する状況において，Miya が求めた点を中心とする円をかき，対応する点が同一円周上に並んでいた結果から正当化したり，Seki が，麻の葉の中のいくつかの場合について成り立っているから正しいと主張したりした場面に代表される。平行に並んだ場合では成り立たない反例を示した Oda の思考も，麻の葉で追究した点では，具体場面に依拠したものと言えよう。ここでの推論は，操作結果や単元を通した学習で慣れ親しんだ麻の葉にフィードバックした考えに支えられている。

Ⅳは，垂直二等分線を作図したことが思考の出発点に位置づき，２つの三角形の対応の中に垂直二等分線の関係が顕在化し，その性質を利用して追究する状態である。第８時に見られた Matu や Noza の説明によって価値づけられた「ＡＤの垂直二等分線上ではどこでもＡとＤまでの距離は同じ。ＣＦの垂直二等分線上では，どこでもＣとＦまでの距離は同じ。その交点Ｏは，ＯＡ＝ＯＤかつＯＣ＝ＯＦを満たすので回転の中心」という論理は，ＡＤとＣＦの垂直二等分線を作図した行為を前提として，交点Ｏが存在する事実をもとに結論が導かれており，演繹的推論の様相を示している。そして，図 28 のように，垂直二等分線や２つの三角形を包摂する四角形が顕在化した図において，合同性に基づく説明が受け入れられたものと考える。

次に，各段階間の移行を促進する要因について述べる。

Ⅰ→Ⅱは，中心と対応する一組の点との関係から導いた考えられるいくつかの中心を調整するための思考によるものととらえる。その思考を助ける上で，移動や教師の示した連続変形のイメージは重要であったと考える。

Ⅱ→Ⅲは，Simi の作図を共有化し，回転の中心となっているかを確かめる方法として生まれた。授業では，「本当に回転の中心なのか？」の問いが教師によるものとなったが，この問いにより，求め方の妥当性を検討する状況への移行が促されたととらえる。

Ⅲ→Ⅳは，第８時において，Matu や Noza が，垂直二等分線の性質を出発点として説明を行ったことからも，“垂直二等分線の交点が回転の中心と言えそうだ”という共通認識を，「やったこと」と「結果としてわかったこと」を区別して命題化した場の設定による影響が大きかった。そして，その説明を可能にした背景として，垂直二等分線の作図により問題場面が再構成されたことが挙げられる。「やったこと」と「結果としてわかったこと」を分けた表記は第４時でも行っているが，そこでは，「結果としてわかったこと」が，教科書の内容と合うように教師の指示により記入した内容であったため，十分に命題として認識されるものとはならなかった。ここでは，命題「垂直二等分線の作図⇒交点が回転の中心」の，下線部矢印（⇒）の仕組みに焦点化するはたらきかけが重要となった。

5.3. 移行の枠組みの視点からの考察

本場は，算数と論証をつなぐ移行教材として着目した中学１年『平面図形』の単元の最後の場である。本節では，移行段階の枠組み（図２）の視点から本場の活動を振り返り，算数から論証への移行の様相を述べるとともに，本場の学習の成果を，暫定的な移行段階の枠組みに反映させる作業を行う。

作図は，図形を決定づける行為そのものととらえる。しかし，その初期の状態では，Oda の“円の４分の１”による正方形の作図や，正当化の説明に自信が持てなかった Nisi の台形の作図に見られるように，生徒の意識は，

完成した形の外枠のイメージの影響を強く受け，方法よりも結果の方に目が向いていたと考えられる。その点では，算数的段階の相が伺える。そして，直角や平行の作図や回転の中心を求める場で，場面の中に形が顕在化したときに，他の図形の性質を利用して追究する状況（図形の道具的使用）へと進展した。

論理的順序性の認識に関わる内容としては，前半の「作図の発見ゲーム」の場面での作図の正当化は，やや“描き方の共通理解”のレベルに留まっており，生徒にとって命題としての認識は十分されていなかった。しかし，後半の回転の中心の作図場面では，行為のステップの顕在化により命題が成立し，垂直二等分線の性質を論理の出発点としたMatu や Noza の説明は，論理の順序性を示したものとして特徴づけられる。また，場面から２つの四角形を見出し，作図のプロセスと移動の念頭化により２つの図形の合同性を正当化して結論を導いた最後の状況は，教師の働きかけによる部分は大きかったものの，生徒の中では，２つの図形の対応が明確にとらえられており，不自然さを感じることなく展開されたといえる。そして，記述や合同条件の認識には不十分さが残るものの，論理的には証明のすじ道をたどっているものととらえ，数学的段階の活動と考える。

表現・コミュニケーション面に関しては，記号による作図ステップの表現が共有され，図（例えば，図 26 や図 28 参照）は，ただの形を表すものではなく，記号によって表され，一般的な性質や関係を内包し，作図の正当性や説明を補足するものへと変容している。そこに至る過程において，半径の任意性から価値づけられた連続変形の見方は，垂直二等分線の交点を特徴づける上で大きく貢献した。

つまり，本場では，算数的段階から移行的段階を経て，数学的段階へ移行する活動が認められ，論証の世界に足を踏み入れた場として記述できうるものと考える。

以上の点をまとめれば，移行的段階には，次の成分が入りうることが示唆される（上記下線部参照）。

- 形の顕在化（かたちを見出すこと）
- ２つの図形の対応
- 連続変形の見方
- 一般的な性質や関係を内包

図形を論理の中で道具的に使用し，論証へ高めていくためには，その素地として，場面の中に，かたちを見出すことや対応づけの見方が不可欠であった。また，図の発展的認識の様相に，連続的に変形してとらえる相，一般的性質を内包したものとして説明を補足する相が認められた。

今後，第１，第２の場の分析をもとに，移行的段階を精緻化する作業が必要ではあるが，現時点においても，これらの内容を移行期の指導に組み入れるよう努めることは，算数から数学への接続により有効にはたらくものと考える。

６．おわりに

本稿では，図形の作図とその正当化を発見・構成する活動を通して，生徒たちが説明をつくり上げ，論証に向けて演繹的な推論体系を獲得していく様相を見てきた。そこで得られた知見は，次の点である。

①図形の回転移動による重ね合わせの証明において，回転の中心が決まるまでの思考過程に，中心と対応する一組の点との対応で追究する状態，垂直二等分線との関連性が見えてくる状態，操作結果により帰納的に正当化を試みる状態，垂直二等分線の性質と辺の対応が結びつき合同によるとらえが可能となる状態の４つの状態が認められた。

②２つの三角形を対応づける問題場面で，かたちや線を見出し場面をとらえた行為は，移動による図形認識の効果ととらえる。そして，垂直二等分線の作図により場面が再構成され，命題の意識と図の中に顕在化さ

れた垂直二等分線の性質とが結びついたとき，操作による帰納的な説明から，作図の性質と三角形の合同を根拠とした演繹的推論への変容が認められた。

③本研究の成果から，移行期の学習指導において，かたちを見出し，対応づけて見ることや，図を連続的に変形するなどして，一般的な性質としての認識を高めていくことの重要性が示唆された。これらは，図形学習における算数から数学への移行段階に必要な認識や活動に位置づくものと考える。

④３つの場による展開が，算数的段階から数学的段階への移行に寄与したととらえる。換言するならば，発見と移動と作図の学習を，移行的段階の枠組みの視点から相互作用するように単元を構成したときに，算数から論証への接続を実現する可能性があると記述できうるものと考える。

今後の課題は，３つの場の分析を基に単元を通した考察を行い，教授実験を学校現場でより扱いやすい形に仕上げることと，暫定的に設定した移行の枠組みを再検討し，より移行期の様相を明確にすること，さらには，本研究の知見を他領域における単元開発に広げることである。

謝辞

本研究を進めるにあたり，上越市立三和中学校の秋山正道校長先生をはじめ数学科の先生方，生徒の皆さんには多大なるご協力をいただきました。心より感謝申し上げます。

注および引用参考文献

注．本稿では,『作図の発見ゲーム』と「作図の発見ゲーム」の二通りの表現を用いる。前者（『　』）は，場の名称，後者（「　」）は，ゲームそのものを指すものとする。

Brousseau,G.（1997）. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

江森英世．（1994）．Oral　expression の指導のポイント．中学校数学科教育実践講座第６巻（pp.274-280）．ニチブン．

榎戸章仁他．（1988）．討論による学習指導－図形概念の学習指導を取り上げて．日本数学教育学会誌，70(1)，2-8.

橋本是浩．（2006）．生徒が創造性を発揮し，意欲的に活動する図形指導．数学教育７月号，4-7．明治図書.

平林一栄．（1986）. 数学教育の有効性のために. 奈良教育大学紀要, 36, 13-29.

木下康仁．（2003）. グラウンデッド・セオリー・アプローチの実践―質的研究への誘い. 弘文堂.

髙本誠二郎.（2007a）. 小学校算数から中学校数学への接続を促す学習指導に関する研究―中学校１年『平面図形』の単元開発―. 上越数学教育研究, 22, 143-154.

髙本誠二郎.（2007b）. 図形間の順序的関係づけの初期の様相について図形の論証への接続を目指した教授実験の報告（その１）―. 第 26 回全国数学教育学会発表資料.

髙本誠二郎，岡崎正和.（2007）. 教授学的状況論に基づく移動による図形の探究過程―図形の論証への接続を目指した教授実験の報告（その２）―．第 40 回数学教育論文発表会論文集, 427-432.

岡崎正和, 岩崎秀樹.（2003）. 算数から数学への移行教材としての作図―経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践．数学教育学論究, 80, 3-27.